ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ОБ ОМБИЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ $V_p \subset E_{p+3}$

П.П. Е ф р о с

В работе устанавливается, что вторая поляра точки $x \in V_p \subset E_{p+3}$ не может быть однополостным гиперболоидом, дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы вторая поляра была конусом второго порядка. Устанавливается, что поверхность V_p лежит на гиперсфере в E_{p+3} тогда и только тогда, когда она омбилическая и вершина конуса (второй поляры) неподвижна при любом смещении точки по поверхности.

1. Рассмотрим гладкую неминимальную p-мерную поверхность V_p в евклидовом пространстве E_{p+3}. Отнесем поверхность к подвижному реперу $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)$ $(i,j,k,\ell,s,t = 1,2,\dots p;\ \alpha,\beta,\gamma = p+1, p+2, p+3)$, где орты $\vec{e}_i \in T_x(V_p)$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_3(x)$ поверхности V_p. Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \qquad\qquad (1)$$
$$d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta.$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получаем равенства $\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j$, $b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha$, где b_{ij}^α – второй основной тензор поверхности. Имеем

$$db_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{jk}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k. \qquad (2)$$

Предполагаем, что размерность главной нормали [1] поверхности максимальна.

Уравнение

$$\det \| \sum_\alpha \gamma^{ik} b_{kj}^\alpha y^\alpha - \delta_j^i \| = 0 \qquad (3)$$

определяет в $N_3(x)$ алгебраическую поверхность порядка p, не проходящую через точку $x \in V_p$ – присоединенную поверхность [1].

Уравнение второй поляры точки x относительно присоединенной поверхности [2] в ортонормированном репере имеет вид:

$$a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2 a_{\alpha 0} y^\alpha + p(p-1) = 0, \qquad (4)$$

где $a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}' (b_{ii}^\alpha b_{jj}^\beta + b_{ii}^\beta b_{jj}^\alpha - 2 b_{ij}^\alpha b_{ij}^\beta)$, $a_{\alpha 0} = -(p-1)\sum_i b_{ii}^\alpha$.

В работе [3] отмечалось, что вторая поляра не может быть мнимым эллипсоидом, мнимым конусом, гиперболическим параболоидом, цилиндрической поверхностью.

Инвариант K_4 поверхности (4) равен:

$$K_4 = -p(p-1)\sum_{i<j,\,k<\ell,\,s<t} \Big[\frac{1}{6p^3} (\vec{b}_{ii} - \vec{b}_{jj}, \vec{b}_{kk} - \vec{b}_{\ell\ell}, \vec{b}_{ss} - \vec{b}_{tt})^2 + \frac{4}{3} (\vec{b}_{ij}, \vec{b}_{k\ell}, \vec{b}_{st})^2 +$$
$$+ \frac{1}{p^2} (\vec{b}_{ii} - \vec{b}_{jj}, \vec{b}_{kk} - \vec{b}_{\ell\ell}, \vec{b}_{st})^2 + \frac{2}{p} (\vec{b}_{ii} - \vec{b}_{jj}, \vec{b}_{k\ell}, \vec{b}_{st})^2 \Big]. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что всегда $K_4 \leq 0$, а это значит, что вторая поляра точки x относительно присоединенной поверхности не может быть однополостным гиперболоидом. Из (5) следует, что верна (репер R ортонормированный)

Т е о р е м а 1. Вторая поляра точки x относительно присоединенной поверхности является конусом второго порядка тогда и только тогда, когда все векторы системы $p(p-1)$ векторов $\{\vec{b}_{ii} - \vec{b}_{jj}, \vec{b}_{k\ell}\}$ $(i<j, k<\ell)$ компланарны.

С л е д с т в и е 1. Поверхность $V_p \subset E_{p+3}$ омбилическая относительно некоторой нормали тогда и только тогда, когда все векторы $\vec{b}_{ii} - \vec{b}_{jj}, \vec{b}_{k\ell}$ компланарны. Нормаль, относительно которой поверхность является омбилической, ортогональна этим векторам и проходит через вершину конуса (второй поляры).

С л е д с т в и е 2. Индикатриса кривизны [4] омбилической поверхности лежит в плоскости, проходящей через вершину конуса и ортогональной особой нормали.

С л е д с т в и е 3. Если вторая поляра точки $x \in V_p$ является конусом второго порядка, то на поверхности не существует асимптотических линий.

2. Пусть поверхность $V_p \subset E_{p+3}$ омбилическая относительно поля нормальных векторов $\vec{n}$. Орт $\vec{e}_{p+3}$ репера направим по этому вектору. Тогда

$$b^{p+3}_{11} = b^{p+3}_{22} = \ldots = b^{p+3}_{pp} = b \neq 0, \quad b^{p+3}_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

а формы $\omega^{p+1}_{p+3}, \omega^{p+2}_{p+3}$ будут главными:

$$\omega^{\bar\alpha}_{p+3} = \lambda^{\bar\alpha}_{k}\, \omega^{k} \quad (\bar\alpha, \bar\beta = p+1, p+2). \qquad (6)$$

Продолжая систему (6), получим

$$d\lambda^{\bar\alpha}_{k} = \lambda^{\bar\alpha}_{i}\, \omega^{i}_{k} + b^{\bar\alpha}_{ki}\, \omega^{i}_{p+3} - \lambda^{\bar\beta}_{k}\, \omega^{\bar\alpha}_{\bar\beta} + \lambda^{\bar\alpha}_{ki}\, \omega^{i},$$

где $\lambda^{\bar\alpha}_{ki}$ - величины, симметричные по нижним индексам. Величины $\lambda^{\bar\alpha}_{k}$ образуют тензорное поле.

Вершина конуса (второй поляры) определяется радиус-вектором

$$\vec{C} = \vec{x} + \frac{1}{b}\vec{e}_{p+3}\,. \qquad (7)$$

Найдем те направления на поверхности V_p, вдоль которых точка C неподвижна. Продифференцируем (7) и потребуем, чтобы $d\vec{C} = 0$. Имеем

$$d\vec{C} = -\frac{db}{b^2}\vec{e}_{p+3} + \frac{1}{b}\,\omega^{\bar\alpha}_{p+3}\, e_{\bar\alpha}\,. \qquad (8)$$

Следовательно, искомые направления определяются системой

$$b = \text{const}, \qquad (9)$$

$$\lambda^{\bar\alpha}_{k}\, \omega^{k} = 0\,. \qquad (10)$$

Если $b = \text{const}$ и $\operatorname{rang}\|\lambda^{\bar\alpha}_{k}\| = 0$, то точка C неподвижна при смещении точки x по всей поверхности, и поверхность V_p лежит на гиперсфере $S_{p+2}(c, |\frac{1}{b}|)$. Верно и обратное: если поверхность $V_p \subset E_{p+3}$ лежит на гиперсфере $S_{p+2}(0, r)$, то поверхность-омбилическая и точка 0 есть вершина конуса.

Итак, верна

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_p \subset E_{p+3}$ лежит на гиперсфере в E_{p+3} тогда и только тогда, когда она омбилическая и вершина второй поляры неподвижна при любом смещении по поверхности.

Если $b = \text{const}$ и $\operatorname{rang}\|\lambda^{\bar\alpha}_{k}\| = 1$, то система (10) определяет ($p-1$)-мерное распределение $\Delta_{p-1}(x)$, вдоль которого точка C неподвижна.

Это распределение вполне интегрируемо, и интегральная поверхность V_{p-1} лежит на гиперсфере в E_{p+3}.

Аналогично, если $b = \text{const}$ и $\operatorname{rang}\|\lambda^{\bar\alpha}_{k}\| = 2$, то поверхность V_p расслаивается на двупараметрическое семейство поверхностей V_{p-2}, лежащих на гиперсфере в E_{p+3}.

Отметим, что решения системы (10) определяют также направления на поверхности V_p, вдоль которых вектор $\vec{e}_{p+3}$ переносится параллельно в связности нормального расслоения.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве: Литовский матем.сб.| АН Лит ССР.- Вильнюс, 1966. Т.6. № 4. С.15-31.

2. Е с и н В.А. О поверхностях коразмерности два || Геометрия погруженных многообразий: Межвузовский темат. сб.науч.тр.| МГПИ им.В.И.Ленина.-М., 1981. С.17-22.

3. Е ф р о с П.П. О второй поляре относительно присоединенной поверхности для поверхности $V_p \subset E_{p+3}$ || Тез. докл. У Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям.-Кишенев, 1985. С.14.

4. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства || Сибирский матем.журнал. 1966. № 3. С.499-511.